अध्याय 1

समुच्चय

1.1 समग्र अवलोकन (Overview)

1.1.1 *समुच्चय और उनका निरूपण* (*Sets and their representations*): समुच्चय वस्तुओं का एक सुपरिभाषित संग्रह है। किसी समुच्चय को निरूपित करने की दो विधियाँ हैं:

(i) रोस्टर या सारणीबद्ध रूप (Roster or Tabular form)

(ii) समुच्चय निर्माण रूप (Set builder form)

1.1.2 *रिक्त समुच्चय* (*The empty set*): जिस समुच्चय में एक भी अवयव नहीं होता है उसे रिक्त समुच्चय या शून्य समुच्चय कहते हैं तथा प्रतीक { } या ϕ से प्रदर्शित करते हैं।

1.1.3 *परिमित और अपरिमित समुच्चय* (*Finite and infinite sets*): वह समुच्चय जिसमें अवयवों की संख्या निश्चित होती है, परिमित समुच्चय कहलाता है अन्यथा समुच्चय अपरिमित कहलाता है।

1.1.4 *उप-समुच्चय* (*Sub-sets*): यदि समुच्चय A का प्रत्येक अवयव, समुच्चय B का भी एक अवयव है, तो A, B का उप-समुच्चय कहलाता है। प्रतीकात्मक रूप में हम लिखते हैं कि $A \subset B$, यदि $a \in A \Rightarrow a \in B$.

हम वास्तविक संख्याओं के समुच्चय को **R**
प्राकृत संख्याओं के समुच्चय को **N**
पूर्णांकों के समुच्चय को **Z**
परिमेय संख्याओं के समुच्चय को **Q**
अपरिमेय संख्याओं के समुच्चय को **T** द्वारा निरूपित करते हैं।

हम देखते हैं कि

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R},$$

$$\mathbf{T} \subset \mathbf{R},\ \mathbf{Q} \not\subset \mathbf{T},\ \mathbf{N} \not\subset \mathbf{T}$$

1.1.5 *समान समुच्चय* (*Equal sets*): दिये गये दो समुच्चय A और B में यदि A का प्रत्येक अवयव B का भी अवयव है तथा B का प्रत्येक अवयव A का भी अवयव है, तो समुच्चय A और B समान कहलाते हैं। दो समान समुच्चयों में तथ्यत: समान अवयव होते हैं।

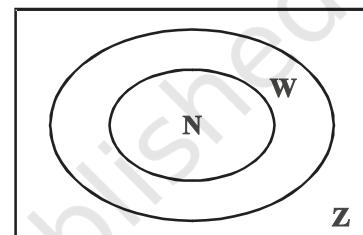
1.1.6 *अंतराल* R *के उप-समुच्चय के रूप में* (*Intervals as sub-sets of R*) मान लीजिए कि $a, b \in$ R और $a < b$ तब

(a) वास्तविक संख्याओं का समुच्चय $\{x : a < x < b\}$ एक विवृत अंतराल (Open interval) कहलाता है और प्रतीक (a, b) द्वारा निरूपित होता है।

(b) वास्तविक संख्याओं का समुच्चय $\{x : a \le x \le b\}$ एक संवृत अंतराल (Closed interval) कहलाता है और प्रतीक $[a, b]$ द्वारा निरूपित होता है।

(c) एक अंत्य बिंदु पर बंद तथा दूसरे पर खुले अंतराल निम्नलिखित द्वारा निरूपित होते है:
$[a, b) = \{x : a \le x < b\}$
$(a, b] = \{x : a < x \le b\}$

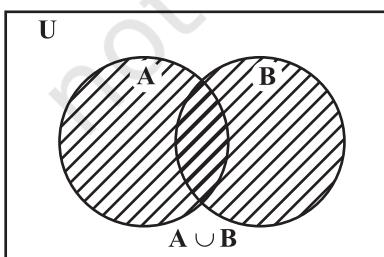
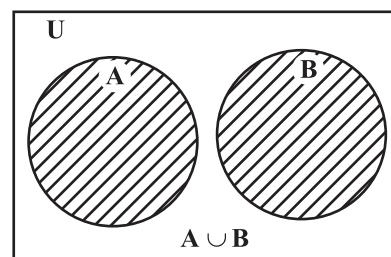
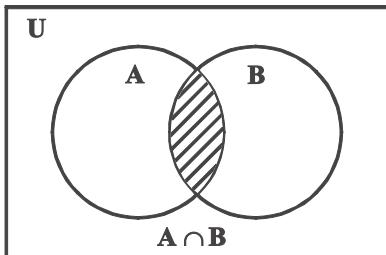
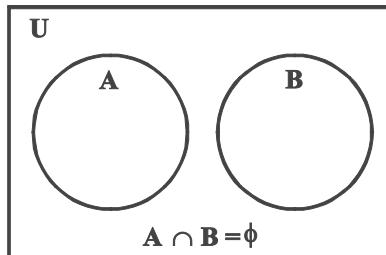
1.1.7 *घात समुच्चय (Power set) :* समुच्चय A के उप-समुच्चयों के संग्रह को A का घात समुच्चय कहते हैं। इसको प्रतीक P(A) से निरूपित करते हैं। यदि A में अवयवों की संख्या = n अर्थात् n(A) = n, तो P(A) में अवयवों की संख्या = 2^n

1.1.8 *सार्वत्रिक समुच्चय (Universal set):* किसी विशेष संदर्भ में यह एक आधारभूत समुच्चय होता है, जिसके अवयव तथा उप-समुच्चय उस विशेष संदर्भ में प्रासंगिक होते हैं। उदाहरण के लिए अंग्रेजी भाषा के वर्णमाला (Alphabet) में स्वर वर्णों (Vowels) के समुच्चय हेतु, अंग्रेजी भाषा के समस्त वर्णमाला का समुच्चय, एक सार्वत्रिक समुच्चय हो सकता है। सार्वत्रिक समुच्चय को प्रतीक U से निरूपित करते हैं।

आकृति 1.1

1.1.9 *वेन आरेख (Venn diagrams):* समुच्चयों के बीच संबंधों को निरूपित करने वाले आरेखों को वेन आरेख कहते हैं। उदाहरणार्थ, प्राकृत संख्याओं का समुच्चय पूर्ण संख्याओं के समुच्चय का एक उप-समुच्चय है, जो स्वयं पूर्णांकों के समुच्चय का एक उप-समुच्चय है। हम इन संबंधों को आकृति 1.1 में दर्शाए गये वेन आरेख द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

1.1.10 *समुच्चयों पर संक्रियाएँ (Operations on sets)*

समुच्चयों का सम्मिलन : (Union of Sets): दो दिये हुए समुच्चय A और B का सम्मिलन समुच्चय C है, जिसमें वे सभी अवयव हैं जो या तो A में या B में हैं। प्रतीकात्मक रूप में हम लिखते हैं कि

$$C = A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ या } x \in B\}$$

आकृति 1.2 (a)

आकृति 1.2 (b)

आकृति 1.3 (a)

आकृति 1.3 (b)

सम्मिलिन की संक्रिया के कुछ गुणधर्म

(i) $A \cup B = B \cup A$ (ii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (iii) $A \cup \phi = A$

(iv) $A \cup A = A$ (v) $U \cup A = U$

समुच्चयों का सर्वनिष्ठ (Intersection of sets) दो समुच्चयों A और B का सर्वनिष्ठ उन सभी अवययों का समुच्चय है जो A और B दोनों में हों। प्रतीकात्मक रूप में हम लिखते हैं कि $A \cap B = \{x : x \in A$ और $x \in B\}$.

यदि $A \cap B = \phi$, तो A और B असंयुक्त समुच्चय (Disjoint sets) कहलाते हैं।

सर्वनिष्ठ संक्रिया के कुछ गुणधर्म

(i) $A \cap B = B \cap A$ (ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(iii) $\phi \cap A = \phi$; $U \cap A = A$ (iv) $A \cap A = A$

(v) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(vi) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

समुच्चयों का अंतर (Difference of sets) प्रतीक A – B द्वारा निरूपित समुच्चयों A और B का अंतर, उन अवयवों का समुच्चय है, जो A में हैं किंतु B में नहीं हैं। इसे हम इस प्रकार लिखते हैं**:**

$$A - B = \{x : x \in A \text{ और } x \notin B\}$$

साथ ही $$B - A = \{ x : x \in B \text{ और } x \notin A\}$$

समुच्चय का पूरक (Complement of a set) मान लीजिए कि U एक सार्वत्रिक समुच्चय है और A, U का एक उप-समुच्चय है, तो A का पूरक समुच्चय, U के उन अवयवों का समुच्चय है जो A के अवयव नहीं है। प्रतीकात्मक रूप में हम लिखते हैं कि –

$$A' = \{x : x \in U \text{ और } x \notin A\}. \text{ साथ ही } A' = U - A$$

पूरक समुच्चयों के कुछ गुणधर्म (Some properties of complement of sets)

(i) पूरक नियम (Law of complements)

(a) $A \cup A' = U$ (b) $A \cap A' = \phi$

(ii) डि-मॉर्गेन का नियम (De Morgan's law):

(a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(iii) $(A')' = A$

(iv) $U' = \phi$ तथा $\phi' = U$

1.1.11 दो समुच्चयों के सम्मिलन और सर्वनिष्ठ पर आधारित व्यावहारिक प्रश्नों को सरल करने के सूत्र *(Formulae to solve practical problems on union and intersection of two sets)*

यदि A, B *और* C कोई परिमित समुच्चय हों, तब

(a) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

(b) यदि $(A \cap B) = \phi$, तो $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

(c) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

1.2 हल किए हुए उदाहरण (Solved Examples)

लघु उत्तरीय प्रश्न (Short Answer)

उदाहरण 1 निम्नलिखित समुच्चयों को रोस्टर रूप में लिखिए।

(i) $A = \{x \mid x;$ 10 से छोटा एक धन पूर्णांक है और $2^x - 1$ एक विषम संख्या है$\}$

(ii) $C = \{x : x^2 + 7x - 8 = 0, x \in \mathbf{R}\}$

हल

(i) x के समस्त धन पूर्णांक मानों के लिए $2^x - 1$ सदैव एक विषम संख्या होगी। विशेष रूप से $x = 1, 2, ...9$ के लिए $2^x - 1$ एक विषम संख्या है। अत: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

(ii) $x^2 + 7x - 8 = 0$ या $(x + 8)(x - 1) = 0$ जिससे $x = -8$ या $x = 1$

अत: $C = \{-8, 1\}$

उदाहरण 2 बताइए कि निम्नलिखित कथनों में से कौन से कथन सत्य और कौन से असत्य है। अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।

(i) $37 \notin \{x \mid x$ के तथ्यत: (exactly) दो धन गुणनखंड हैं$\}$

(ii) $28 \in \{y \mid y$ के समस्त धन गुणनखंडों का योगफल $2y$ है$\}$

(iii) 7,747 संख्या $\in \{t \mid t$, 37 का गुणज (multiple) है $\}$

हल

(i) असत्य

क्योंकि, 37 के तथ्यत: दो घन गुणनखण्ड 1 और 37 है, अत: 37 दिये समुच्चय में है।

(ii) सत्य

क्योंकि, 28 के धन गुणनखण्डों का योगफल

$= 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28$

$= 56 = 2 \times 28$

(iii) असत्य

7,747, संख्या 37 का गुणज नहीं है।

उदाहरण 3 यदि X और Y सार्वजनिक समुच्चय U के उप-समुच्चय हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

(i) $Y \subset X \cup Y$ (ii) $X \cap Y \subset X$ (iii) $X \subset Y \Rightarrow X \cap Y = X$

हल

(i) $X \cup Y = \{x \mid x \in X$ या $x \in Y\}$

इस प्रकार $x \in Y \Rightarrow x \in X \cup Y$

अत: $Y \subset X \cup Y$

(ii) $X \cap Y = \{x \mid x \in X$ और $x \in Y\}$

इस प्रकार $x \in X \cap Y \Rightarrow x \in X$

अत: $X \cap Y \subset X$

(iii) ध्यान दीजिए कि

$x \in X \cap Y \Rightarrow x \in X$

इस प्रकार $X \cap Y \subset X$

साथ ही साथ, क्योंकि $X \subset Y$,

अतएव $x \in X \Rightarrow x \in Y \Rightarrow x \in X \cap Y$

अत: $X \subset X \cap Y$

इस प्रकार परिणाम $X = X \cap Y$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 4 दिया हुआ है कि $N = \{1, 2, 3, ..., 100\}$, तो

(i) N का वह उप-समुच्चय A लिखिए, जिसके अवयव विषम संख्याएं हैं।

(ii) N का वह उप-समुच्चय B लिखिए, जिसके अवयव $x + 2$ द्वारा निरूपित होते हैं, जहाँ $x \in N$ है।

हल

(i) $A = \{x \mid x \in N$ और x विषम संख्या है$\} = \{1, 3, 5, 7, ..., 99\}$

(ii) $B = \{y \mid y = x + 2, x \in N\}$

अतएव $1 \in N$ के लिए $y = 1 + 2 = 3$

$2 \in N$ के लिए $y = 2 + 2 = 4$ इत्यादि

अत:, $B = \{3, 4, 5, 6, ... , 100\}$

उदाहरण 5 दिया है कि, $E = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. यदि n, E के किसी सदस्य (अवयव) को निरूपित करता है, तो निम्नलिखित द्वारा निरूपित सभी संख्याओं वाले समुच्चय लिखिए:

(i) $n + 1$ (ii) n^2

हल: दिया है $E = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

(i) मान लीजिए कि, $A = \{x \mid x = n + 1, n \in E\}$

इस प्रकार $2 \in E$ के लिए $x = 3$

$4 \in E$ के लिए $x = 5$ इत्यादि

इसलिए $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$

(ii) मान लीजिए $B = \{x \mid x = n^2, n \in E\}$

अतएव, $2 \in E$ के लिए $x = (2)^2 = 4$

$4 \in E$ के लिए $x = (4)^2 = 16$

$6 \in E$ के लिए $x = (6)^2 = 36$ इत्यादि।

इसलिए $B = \{4, 16, 36, 64, 100\}$

उदाहरण 6 मान लीजिए कि $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ यदि n, X के किसी सदस्य को निरूपित करता है, तो निम्नलिखित को समुच्चय रूप में व्यक्त कीजिए

(i) $n \in X$, परंतु $2n \notin X$ (ii) $n + 5 = 8$ (iii) n, 4 से अधिक है

हल

(i) $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ यह दिया है कि $n \in X$, परंतु $2n \notin X$

मान लीजिए कि, $A = \{x \mid x \in X$ और $2x \notin X\}$

अब	$1 \notin A$	क्योंकि	$2 \times 1 = 2 \in X$
	$2 \notin A$	क्योंकि	$2 \times 2 = 4 \in X$
	$3 \notin A$	क्योंकि	$2 \times 3 = 6 \in X$
किंतु	$4 \in A$	क्योंकि	$2 \times 4 = 8 \notin X$
	$5 \in A$	क्योंकि	$2 \times 5 = 10 \notin X$
	$6 \in A$	क्योंकि	$2 \times 6 = 12 \notin X$

अतः $A = \{4, 5, 6\}$

(ii) मान लीजिए कि, $B = \{x \mid x \in X$ और $x + 5 = 8\}$

यहाँ $B = \{3\}$ जैसा $x = 3 \in X$ और $3 + 5 = 8$ और X में अन्य कोई ऐसा अवयव x नहीं है, जिसके लिए $x + 5 = 8$.

(iii) मान लीजिए कि $C = \{x \mid x \in X, x > 4\}$

अतः $C = \{5, 6\}$

उदाहरण 7 समुच्चय E, M और U के बीच निम्नलिखित संबंधों को स्पष्ट करने वाले वेन आरेख खींचिए, जहाँ E, किसी विद्यालय में अंग्रेजी पढ़ने वाले विद्यार्थियों का समुच्चय है, M इसी विद्यालय में गणित पढ़ने वाले विद्यार्थियों का समुच्चय है तथा U उस विद्यालय में पढ़ने वाले समस्त विद्यार्थियों का समुच्चय है।

(i) गणित पढ़ने वाले सभी विद्यार्थी अंग्रेजी भी पढ़ते हैं परंतु अंग्रेजी पढ़ने वाले कुछ ऐसे विद्यार्थी हैं जो गणित नहीं पढ़ते हैं।

(ii) ऐसा कोई विद्यार्थी नहीं हैं जो गणित तथा अंग्रेजी दोनों विषय पढ़ता है।

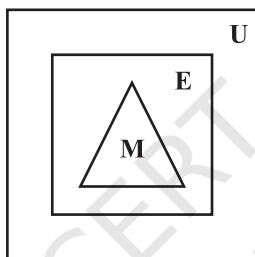
(iii) कुछ विद्यार्थी गणित पढ़ते हैं परंतु अंग्रेजी नहीं पढ़ते हैं, कुछ अंग्रेजी पढ़ते हैं परंतु गणित नहीं पढ़ते हैं और कुछ दोनों विषय पढ़ते हैं।

(iv) सभी विद्यार्थी गणित नहीं पढ़ते हैं परंतु अंग्रेजी पढ़ने वाला प्रत्येक विद्यार्थी गणित भी पढ़ता है।

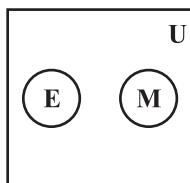
हल

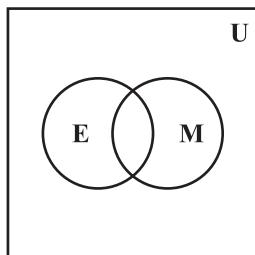
(i) क्योंकि गणित पढ़ने वाले सभी विद्यार्थी अंग्रेजी भी पढ़ते हैं परंतु अंग्रेजी पढ़ने वाले कुछ ऐसे विद्यार्थी हैं, जो गणित नहीं पढ़ते हैं।

अतएव, $M \subset E \subset U$

इसका वेन आरेख आकृति 1.4 में दर्शाया गया है।

आकृति 1.4

(ii) क्योंकि ऐसा कोई विद्यार्थी नहीं है, जो अंग्रेजी तथा गणित दोनों विषय पढ़ता हो

अत: $E \cap M = \phi$.

आकृति 1.5

(iii) क्योंकि कुछ विद्यार्थी अंग्रेजी तथा गणित दोनों विषय पढ़ते हैं, कुछ केवल अंग्रेजी और कुछ केवल गणित पढ़ते हैं।

आकृति 1.6

इसका वेन आरेख आकृति 1.6 में दर्शाया गया है।

(iv) क्योंकि अंग्रेजी पढ़ने वाला प्रत्येक विद्यार्थी गणित भी पढ़ता है,

अत: $E \subset M \subset U$

आकृति 1.7 का वेन आरेख इसे प्रदर्शित करता है।

आकृति 1.7

उदाहरण 8 सभी समुच्चयों A, B और C के लिए क्या $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ है? अपने कथन (उत्तर) का औचित्य भी बताइए।

हल नहीं। नीचे लिखे A, B और C समुच्चयों पर विचार कीजिए:

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \{2, 3, 5\}$$
$$C = \{4, 5, 6\}$$

अब $(A \cap B) \cup C = (\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 5\}) \cup \{4, 5, 6\}$

$= \{2, 3\} \cup \{4, 5, 6\}$

$= \{2, 3, 4, 5, 6\}$

और $A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3\} \cap [\{2, 3, 5\} \cup \{4, 5, 6\}$

$= \{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6\}$

$= \{2, 3\}$

अत: $(A \cap B) \cup C \neq A \cap (B \cup C)$

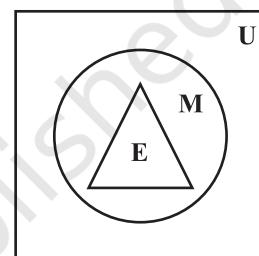
उदाहरण 9 समुच्चयों के गुणधर्मों का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि सभी समुच्चयों A तथा B के लिए

$$A - (A \cap B) = A - B$$

हल $A - (A \cap B) = A \cap (A \cap B)'$ (क्योंकि $A - B = A \cap B'$)

$= A \cap (A' \cup B')$ (De Morgan's के नियम द्वारा)

$= (A \cap A') \cup (A \cap B')$ (वितरण नियम द्वारा)

$$= \phi \cup (A \cap B')$$
$$= A \cap B' = A - B$$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A)

उदारहण 10 सभी समुच्चयों A, B तथा C के लिए क्या $(A - B) \cap (C - B) = (A \cap C) - B$ है? अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

हल हाँ।

मान लीजिए कि $x \in (A - B) \cap (C - B)$

$\Rightarrow$ $x \in A - B$ और $x \in C - B$

$\Rightarrow$ $(x \in A$ और $x \notin B)$ और $(x \in C$ और $x \notin B)$

$\Rightarrow$ $(x \in A$ और $x \in C)$ और $x \notin B$

$\Rightarrow$ $(x \in A \cap C)$ और $x \notin B$

$\Rightarrow$ $x \in (A \cap C) - B$

अतएव $(A - B) \cap (C - B) \subset (A \cap C) - B$ ... (1)

विलोमतः (Conversely),

मान लीजिए कि $y \in (A \cap C) - B$

$\Rightarrow$ $y \in (A \cap C)$ और $y \notin B$

$\Rightarrow$ $(y \in A$ और $y \in C)$ और $y \notin B$

$\Rightarrow$ $(y \in A$ और $y \notin B)$ और $(y \in C$ और $y \notin B)$

$\Rightarrow$ $y \in (A - B)$ और $y \in (C - B)$

$\Rightarrow$ $y \in (A - B) \cap (C - B)$

अतएव $(A \cap C) - B \subset (A - B) \cap (C - B)$ ... (2)

(1) तथा (2) द्वारा $(A - B) \cap (C - B) = (A \cap C) - B$

उदाहरण 11 मान लीजिए कि A, B और C समुच्चय हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

हल हम पहले सिद्ध करेंगे कि $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$

मान लीजिए कि $x \in A \cup (B \cap C)$, तो

$x \in A$ या $x \in B \cap C$

$\Rightarrow$ $x \in A$ या $(x \in B$ और $x \in C)$

$\Rightarrow$ $(x \in A$ या $x \in B)$ और $(x \in A$ या $x \in C)$

$\Rightarrow$ $(x \in A \cup B)$ और $(x \in A \cup C)$

$\Rightarrow$ $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

अतः $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ... (1)

अब हम सिद्ध करेंगे कि $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (A \cup C)$

मान लीजिए कि $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\Rightarrow$ $x \in A \cup B$ और $x \in A \cup C$

$\Rightarrow$ ($x \in A$ या $x \in B$) और ($x \in A$ या $x \in C$)

$\Rightarrow$ $x \in A$ या ($x \in B$ और $x \in C$)

$\Rightarrow$ $x \in A$ या $(x \in B \cap C)$

$\Rightarrow$ $x \in A \cup (B \cap C)$

अतः $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$ ... (2)

अतएव (1) तथा (2) से

$$A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

उदाहरण 12 मान लीजिए कि P अभाज्य संख्याओं का समुच्चय है और $S = \{t \mid 2^t - 1$ एक अभाज्य संख्या है। सिद्ध कीजिए कि $S \subset P$.

उदाहरण अब कथन $x \in S \Rightarrow x \in P$ का समतुल्य (equivalent) प्रतिधनात्मक (Contrapositive) कथन $x \notin P \Rightarrow x \notin S$ है।

अब हम उपर्युक्त प्रतिधनात्मक कथन को विरोधोक्ति (contradiction) द्वारा सिद्ध करेंगे।

मान लीजिए कि $x \notin P$

$\Rightarrow$ x एक संयुक्त संख्या (composite number) है।

अब मान लीजिए कि $x \in S$

$\Rightarrow$ $2^x - 1 = m$ (जहाँ m एक अभाज्य संख्या है)

$\Rightarrow$ $2^x = m + 1$

जो सभी संयुक्त संख्याओं के लिए सत्य नहीं है, उदाहरणार्थ $x = 4$ क्योंकि $2^4 = 16$, जो किसी अभाज्य संख्या m तथा 1 का योगफल नहीं हो सकता है।

अतः हमें एक विरोधोक्ति प्राप्त होती है।

अतएव, जब $x \notin P$, तो हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि $x \notin S$

अतः $S \subset P$

उदारहण 13 गणित, भौतिक विज्ञान तथा रसायन विज्ञान में परीक्षा देने वाले 50 विद्यार्थियों में से प्रत्येक कम से कम एक विषय में उत्तीर्ण होता है। 37 गणित में, 24 भौतिक विज्ञान में तथा 43 रसायन विज्ञान में उत्तीर्ण होते हैं। यदि गणित और भौतिक विज्ञान में अधिकतम 19, गणित और रसायन विज्ञान में अधिकतम 29 तथा भौतिक विज्ञान और रसायन विज्ञान में अधिकतम 20 उत्तीर्ण होते हैं, तो तीनों विषयों में उत्तीर्ण होने वाले विद्यार्थियों की अधिकतम संभव संख्या कितनी है?

हल मान लीजिए कि,

M गणित में उत्तीर्ण होने वाले विद्यार्थियों का समुच्चय है,

P भौतिक विज्ञान में उत्तीर्ण होने वाले विद्यार्थियों का समुच्चय है और

C रसायन विज्ञान में उत्तीर्ण होने वाले विद्यार्थियों का समुच्चय है

अब $n(M \cup P \cup C) = 50, n(M) = 37, n(P) = 24, n(C) = 43$

$n(M \cap P) \leq 19, n(M \cap C) \leq 29,$ तथा $n(P \cap C) \leq 20$ (दिया है)

ज्ञात है कि,

$$n(M \cup P \cup C) = n(M) + n(P) + n(C) - n(M \cap P) - n(M \cap C) - n(P \cap C) + n(M \cap P \cap C) \leq 50$$

$\Rightarrow$ $37 + 24 + 43 - 19 - 29 - 20 + n(M \cap P \cap C) \leq 50$

$\Rightarrow$ $n(M \cap P \cap C) \leq 50 - 36$

$\Rightarrow$ $n(M \cap P \cap C) \leq 14$

अत: तीनों विषयों में उत्तीर्ण होने वालों की अधिकतम संभव संख्या 14 है।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न (Objective Type Questions)

उदारहण 14 से 16 में दिये गये चार विकल्पों में से सही विकल्प का चयन कीजिए: (M.C.Q.)

उदाहरण 14 प्रत्येक समुच्चय X_r में 5 अवयव हैं तथा प्रत्येक समुच्चय Y_r में 2 अवयव हैं और $\bigcup_{r=1}^{20} X_r = S = \bigcup_{r=1}^{n} Y_r$. यदि S का प्रत्येक अवयव X_r के तथ्यत: (exactly) 10 समुच्चयों और Y_r प्रकार के तथ्यत: 4 समुच्चयों में है, तो n का मान

(A) 10 (B) 20 (C) 100 (D) 50

हल सही उत्तर (B) है।

क्योंकि, $n(X_r) = 5$, $\bigcup_{r=1}^{20} X_r = S$, अतएव $n(S) = 100$

परंतु S का प्रत्येक अवयव X_r प्रकार के तथ्यत: (ठीक-ठीक) 10 समुच्चयों में है, अतएव $\frac{100}{10} = 10$ सुस्पष्ट (distinct) अवयव S में हैं। साथ ही साथ (Also) S का प्रत्येक अवयव Y_r प्रकार के तथ्यत: 4 समुच्चयों में है और प्रत्येक Y_r में 2 अवयव हैं। इस प्रकार यदि Y_r प्रकार के n समुच्चय S में हैं, तो

$$\frac{2n}{4} = 10$$

अतएव $n = 20$

उदाहरण 15 दो परिमित (Finite) समुच्चयों में क्रमश: m और n अवयव हैं। पहले समुच्चय के उप-समुच्चयों की कुल संख्या दूसरे समुच्चय के उप-समुच्चयों की कुल संख्या से 56 अधिक है। m और n के मान क्रमश:

(A) 7, 6 (B) 5, 1 (C) 6, 3 (D) 8, 7

हल सही उत्तर (C) है।

मान लीजिए कि A तथा B ऐसे समुच्चय हैं कि $n(A) = m, n(B) = n$

इस प्रकार $n(P(A)) = 2^m, n(P(B)) = 2^n$

अतएव $n(P(A)) - n(P(B)) = 56$, अर्थात् $2^m - 2^n = 56$

$\Rightarrow \quad 2^n(2^{m-n} - 1) = 2^3 7$

$\Rightarrow \quad n = 3, 2^{m-n} - 1 = 7$

$\Rightarrow \quad m = 6$

उदाहरण 16 समुच्चय $(A \cup B \cup C) \cap (A \cap B' \cap C')' \cap C'$ समान है

(A) $B \cap C'$ (B) $A \cap C$ (C) $B \cup C'$ (D) $A \cap C'$

हल: सही उत्तर (A) है,

क्योंकि, $(A \cup B \cup C) \cap (A \cap B' \cap C')' \cap C'$

$= (A \cup (B \cup C)) \cap (A' \cup (B \cup C)) \cap C'$

$= (A \cap A') \cup (B \cup C) \cap C'$

$= \phi \cup (B \cup C) \cap C'$

$= B \cap C' \cup \phi = B \cap C'$

उदाहरण 17 और 18 में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

उदारहण 17 यदि A और B दो परिमित समुच्चय हैं, तो $n(A) + n(B)$ ________ के बराबर होता है।

हल: क्योंकि $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

अब $n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B)$

उदाहरण 18 यदि A एक परिमित समुच्चय है, जिसमें n अवयव हैं, तो A के उप-समुच्चयों की संख्या ________ होती है।

हल 2^n

बताइए कि उदाहरण 19 और 20 में दिये निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य हैं।

उदाहरण 19 मान लीजिए कि R और S निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित समुच्चय हैं:

$R = \{x \in \mathbf{Z} \mid x$, 2 से भाज्य है$\}$

$S = \{y \in \mathbf{Z} \mid y$, 3 उसे भाज्य है$\}$,

तो $R \cap S = \phi$

हल असत्य। क्योंकि 6, 3 ओर 2 दोनों से भाज्य है।

अत: $R \cap S \neq \phi$

उदाहरण 20 $Q \cap R = Q$, जहाँ Q परिमेय संख्याओं का समुच्चय है और R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

हल: सत्य क्योंकि $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$, इसलिए $\mathbf{Q} \cap \mathbf{R} = \mathbf{Q}$

1.3 प्रश्नावली

लघु उत्तरीय प्रश्न (S.A.)

1. निम्नलिखित समुच्चयों को रोस्टर रूप में लिखिए:

(i) $A = \{x : x \in \mathbf{R}, 2x + 11 = 15\}$ (ii) $B = \{x \mid x^2 = x, x \in \mathbf{R}\}$

(iii) $C = \{x \mid x$ अभाज्य संख्या p का एक धनात्मक गुणनखंड है$\}$

2. निम्नलिखित समुच्चयों को रोस्टर रूप में लिखिए:

(i) $D = \{t \mid t^3 = t, t \in R\}$ (ii) $E = \{w \mid \dfrac{w-2}{w+3} = 3, w \in \mathbf{R}\}$

(iii) $F = \{x \mid x^4 - 5x^2 + 6 = 0, x \in \mathbf{R}\}$

3. यदि $Y = \{x \mid x$ संख्या $2^{p-1}(2^p - 1)$ का एक धनात्मक गुणनखंड है, जहाँ $2^p - 1$ एक अभाज्य संख्या है$\}$, तो Y को रोस्टर रूप में लिखिए।

4. बताइए कि निम्नलिखित कथनों में से कौन सत्य और कौन असत्य है। अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

(i) $35 \in \{x \mid x$ के तथ्यत: चार धनात्मक गुणनखंड हैं$\}$

(ii) $128 \in \{y \mid y$ के समस्त धनात्मक गुणनखंडों का योगफल $2y$ है$\}$

(iii) $3 \notin \{x \mid x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 112x + 6 = 0\}$

(iv) $496 \notin \{y \mid y$ के समस्त धनात्मक गुणनखंडों का योगफल $2y$ है$\}$

5. दिया है कि $L = \{1, 2, 3, 4\}$, $M = \{3, 4, 5, 6\}$ और $N = \{1, 3, 5\}$, तो सत्यापित (Verify) कीजिए कि $L - (M \cup N) = (L - M) \cap (L - N)$

6. यदि A और B सार्वत्रिक समुच्चय U के उप-समुच्चय हैं, तो सिद्ध कीजिए कि,

(i) $A \subset A \cup B$ (ii) $A \subset B \Leftrightarrow (A \cup B = B)$

(iii) $(A \cap B) \subset A$

7. दिया है कि, $N = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, तो निम्नलिखित को लिखिए:

(i) N का वह उप-समुच्चय, जिसके अवयव सम संख्याएँ हैं।

(ii) N का वह उप-समुच्चय, जिसके अवयव पूर्ण वर्ग (Perfect square) संख्याएँ हैं।

8. दिया है कि $X = \{1, 2, 3\}$, यदि n समुच्चय X के किसी सदस्य को निरूपित करता है, तो

निम्नलिखित द्वारा निरूपित समस्त संख्याओं को अंतर्विष्ट (Contain) करने वाले समुच्चयों को लिखिए:

(i) $4n$ (ii) $n + 6$ (iii) $\frac{n}{2}$ (iv) $n - 1$

9. यदि Y = {1, 2, 3, ... 10}, तथा a समुच्चय Y के किसी अवयव को निरूपित करता है, तो उन समुच्चयों को लिखिए जिनके अंतर्विष्ट समस्त अवयव निम्नलिखित प्रतिबंधों (Conditions) को संतुष्ट करते हैं:

(i) $a \in Y$ परंतु $a^2 \notin Y$ (ii) $a + 1 = 6, a \in Y$

(iii) a, 6 से कम है और $a \in Y$

10. A, B तथा C सार्वत्रिक समुच्चय U के उप-समुच्चय हैं। यदि A = {2, 4, 6, 8, 12, 20} B = {3, 6, 9, 12, 15}, C = {5, 10, 15, 20} और U सभी पूर्ण संख्याओं का समुच्चय है, तो U, A, B और C के परस्पर संबंधों को दर्शाने वाला वेन आरेख खींचिए।

11. मान लीजिए कि U किसी विद्यालय के समस्त लड़के और लड़कियों का समुच्चय है, G उस विद्यालय के समस्त लड़कियों का समुच्चय है, B उस विद्यालय के समस्त लड़कों का समुच्चय है और S उस विद्यालय के उन सभी विद्यार्थियों का समुच्चय है, जो तैरना सीखते हैं। उस विद्यालय के केवल कुछ विद्यार्थी तैरना सीखते हैं। U, G, B और S समुच्चयों के बीच संभव परस्पर संबंधों में से किसी एक संबंध को प्रदर्शित करने वाला एक वेन आरेख खींचिए।

12. सभी समुच्चयों A, B और C के लिए सिद्ध कीजिए कि, $(A - B) \cap (C - B) = A - (B \cup C)$

निर्धारित कीजिए कि प्रश्न संख्या 13 से 17 तक में दिये गये कथन सत्य हैं या असत्य हैं। अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

13. सभी समुच्चयों A और B के लिए, $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

14. सभी समुच्चयों A, B और C के लिए, $A - (B - C) = (A - B) - C$

15. सभी समुच्चयों A, B और C के लिए, यदि $A \subset B$, तो $A \cap C \subset B \cap C$

16. सभी समुच्चयों A, B और C के लिए, यदि $A \subset B$, तो $A \cup C \subset B \cup C$

17. सभी समुच्चयों A, B और C के लिए, यदि $A \subset C$ और $B \subset C$, तो $A \cup B \subset C$

समुच्चयों के गुणधर्मों का प्रयोग करके प्रश्न संख्या 18 से 21 में दिये कथनों को सिद्ध कीजिए:

18. सभी समुच्चयों A और B के लिए, $A \cup (B - A) = A \cup B$

19. सभी समुच्चयों A और B के लिए, $A - (A - B) = A \cap B$

20. सभी समुच्चयों A और B के लिए, $A - (A \cap B) = A - B$

21. सभी समुच्चयों A और B के लिए, $(A \cup B) - B = A - B$

22. मान लीजिए कि $T = \left\{x \mid \frac{x+5}{x-7} - 5 = \frac{4x-40}{13-x}\right\}$ क्या T एक रिक्त समुच्चय है? अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

23. मान लीजिए कि A, B और C कोई समुच्चय हैं, तो सिद्ध कीजिए कि
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

24. 100 विद्यार्थियों में से 15 अंग्रेजी, 12 गणित और 8 विज्ञान में उत्तीर्ण हुए। 6 अंग्रेजी और गणित, 7 गणित और विज्ञान, 4, अंग्रेजी और विज्ञान तथा 4 तीनों विषयों में उत्तीर्ण हुए। ज्ञात कीजिए कि कितने विद्यार्थी उत्तीर्ण हुए:–

(i) अंग्रेजी और गणित परंतु विज्ञान में नहीं
(ii) गणित और विज्ञान परंतु अंग्रेजी में नहीं
(iii) केवल गणित में
(iv) केवल एक से अधिक विषयों में

25. 60 विद्यार्थियों की एक कक्षा में, 25 विद्यार्थी क्रिकेट और 20 विद्यार्थी टेनिस खेलते हैं तथा 10 विद्यार्थी दोनों ही खेल खेलते हैं। उन विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए जो इन दोनों में से कोई भी खेल नहीं खेलते हैं।

26. किसी विद्यालय के 200 विद्यार्थियों के सर्वेक्षण (Survey) से ज्ञात हुआ कि 120 विद्यार्थी गणित, 90 भौतिक विज्ञान तथा 70 रसायन विज्ञान पढ़ते हैं। 40 गणित और भौतिक विज्ञान, 30 भौतिक विज्ञान और रसायन विज्ञान, 50 रसायन विज्ञान और गणित पढ़ते हैं तथा 20 इन विषयों में से कोई भी विषय नहीं पढ़ते हैं। उन विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए, जो इन तीनों ही विषयों को पढ़ते हैं।

27. किसी शहर के 10,000 परिवारों के बारे में ज्ञात होता है कि 40% समाचार पत्र A, 20% समाचार पत्र B, 10% समाचार पत्र C, 5% समाचार पत्र A और B, 3% समाचार पत्र B और C तथा 4% समाचार पत्र A और C खरीदते हैं। यदि 2% परिवार तीनों ही समाचार पत्र खरीदते हैं, तो उन परिवारों की संख्या ज्ञात कीजिए जो

(a) केवल समाचार पत्र A खरीदते हैं।
(b) A, B तथा C में से कोई भी समाचार पत्र नहीं खरीदते हैं।

28. 50 विद्यार्थियों के एक समूह में फ्रांसीसी, अंग्रेजी और संस्कृत विषयों का अध्ययन करने वालों की संख्या निम्नलिखित प्रकार है: फ्रांसीसी = 17, अंग्रेजी = 13, संस्कृत = 15, फ्रांसीसी और अंग्रेजी = 09, अंग्रेजी और संस्कृत = 04, फ्रांसीसी और संस्कृत = 05, अंग्रेजी, फ्रांसीसी और संस्कृत = 03 उन विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए जो,

(i) केवल फ्रांसीसी पढ़ते हैं।
(ii) केवल अंग्रेजी पढ़ते हैं।
(iii) केवल संस्कृत पढ़ते हैं।
(iv) अंग्रेजी और संस्कृत पढ़ते हैं परंतु, फ्रांसीसी नहीं पढ़ते हैं।
(v) फ्रांसीसी और संस्कृत पढ़ते हैं परंतु अंग्रेजी नहीं पढ़ते हैं।
(vi) फ्रांसीसी और अंग्रेजी पढ़ते हैं परंतु संस्कृत नहीं पढ़ते हैं।
(vii) तीनों भाषाओं में से कम से कम एक भाषा पढ़ते हैं।
(viii) तीनों भाषाओं में से एक भी भाषा नहीं पढ़ते हैं।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न (Objective Type Questions)

प्रश्न संख्या 29 से 43 में प्रत्येक में दिये गये चार विकल्पों में सही विकल्प का चयन कीजिए (M.C.Q.):

29. मान लीजिए कि तीस समुच्चय $A_1, A_2, A_3, ..., A_{30}$ में से प्रत्येक में 5 अवयव तथा n समुच्चय $B_1, B_2, B_3, ..., B_n$ में से प्रत्येक में 3 अवयव है। मान लीजिए कि $\bigcup_{i=1}^{30} A_i = \bigcup_{j=1}^{n} B_j = S$ यदि S का प्रत्येक अवयव A_i प्रकार के तथ्यत: 10 और B_j, प्रकार के तथ्यत: 9 समुच्चयों में है, तो n का मान

(A) 15 (B) 3 (C) 45 (D) 35

30. दो परिमित समुच्चयों में क्रमश: m और n अवयव हैं। पहले समुच्चय के उप-समुच्चयों की संख्या दूसरे समुच्चय के उप-समुच्चयों के उप-समुच्चयों की संख्या से 112 अधिक है। m और n के मान क्रमश:

(A) 4, 7 (B) 7, 4 (C) 4, 4 (D) 7, 7

31. समुच्चय $(A \cap B')' \cup (B \cap C)$ निम्नलिखित में से किस समुच्चय के समान है:

(A) $A' \cup B \cup C$ (B) $A' \cup B$ (C) $A' \cup C'$ (D) $A' \cap B$

32. मान लीजिए कि F_1 समांतर चतुर्भुज, F_2 आयत, F_3 समचतुर्भुज, F_4 वर्ग तथा F_5 समलंब चतुर्भुज के समुच्चय हैं, तो F_1 निम्नलिखित में से किसके समान है?

(A) $F_2 \cap F_3$ (B) $F_3 \cap F_4$
(C) $F_2 \cup F_5$ (D) $F_2 \cup F_3 \cup F_4 \cup F_1$

33. मान लीजिए कि S = किसी वर्ग के भीतर के बिंदुओं का समुच्चय, T = किसी त्रिभुज के भीतर के बिंदुओं का समुच्चय, C = किसी वृत्त के भीतर के बिंदुओं का समुच्चय। यदि त्रिभुज और वृत्त एक दूसरे को प्रतिच्छेद करते हैं (काटते हैं) और वर्ग में अंतर्विष्ट हैं, तो

(A) $S \cap T \cap C = \phi$ (B) $S \cup T \cup C = C$
(C) $S \cup T \cup C = S$ (D) $S \cup T = S \cap C$

34. मान लीजिए कि R, भुजा a और b $(a, b > 1)$ वाले एक ऐसे आयत के भीतरी बिंदुओं का समुच्चय है, जिसकी भुजाएँ क्रमश: x-अक्ष तथा y-अक्ष की धनात्मक दिशाओं के अनुदिश (along) हैं, तो

(A) $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$
(B) $R = \{(x, y) : 0 \leq x < a, 0 \leq y \leq b\}$
(C) $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 < y < b\}$
(D) $R = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$

35. 60 विद्यार्थियों की एक कक्षा में 25 विद्यार्थी क्रिकेट, 20 विद्यार्थी टेनिस और 10 विद्यार्थी दोनों ही खेल खेलते हैं, तो दोनों में से कोई भी खेल नहीं खेलने वाले विद्यार्थियों की संख्या

(A) 0 (B) 25 (C) 35 (D) 45 है।

36. यदि 840 व्यक्तियों वाले किसी नगर में 450 व्यक्ति हिंदी, 300 व्यक्ति अंग्रेजी और 200 व्यक्ति दोनों ही विषय पढ़ते हैं, तो दोनों में से कोई भी विषय नहीं पढ़ने वाले व्यक्तियों की संख्या

(A) 210 (B) 290 (C) 180 (D) 260 है।

37. यदि $X = \{8^n - 7n - 1 \mid n \in \mathbf{N}\}$ और $Y = \{49n - 49 \mid n \in \mathbf{N}\}$, तो

(A) $X \subset Y$ (B) $Y \subset X$ (C) $X = Y$ (D) $X \cap Y = \phi$

38. एक सर्वेक्षण प्रदर्शित करता है कि 63% लोग किसी समाचार चैनल (News Channel) को देखते हैं जबकि 76% लोग किसी अन्य चैनल को देखते हैं। यदि x% लोग दोनों चैनल देखते हैं, तो

(A) $x = 35$ (B) $x = 63$ (C) $39 \le x \le 63$ (D) $x = 39$

39. यदि समुच्चय A और B निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित हैं,

$A = \{(x, y) \mid y = \frac{1}{x}, 0 \neq x \in \mathbf{R}\}$ $B = \{(x; y) \mid y = -x, x \in \mathbf{R}\}$, तो

(A) $A \cap B = A$ (B) $A \cap B = B$ (C) $A \cap B = \phi$ (D) $A \cup B = A$

40. यदि A और B दो समुच्चय हैं, तो $A \cap (A \cup B)$ समान है:

(A) A (B) B (C) ϕ (D) $A \cap B$

41. यदि $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}$ $B = \{2, 4, ... , 18\}$ तथा N प्राकृत संख्याओं का समुच्चय सार्वत्रिक समुच्चय है, तो $A' \cup (A \cup B) \cap B')$ समान है:

(A) ϕ (B) **N** (C) A (D) B

42. मान लीजिए कि $S = \{x \mid x$ 100 से छोटा 3 का एक धनात्मक गुणज है$\}$,
$P = \{x \mid x$, 20 से छोटी एक अभाज्य संख्या है$\}$, तो $n(S) + n(P) =$

(A) 34 (B) 31 (C) 33 (D) 30 है।

43. यदि X तथा Y दो समुच्चय हैं और X′ X के पूरक समुच्चय को निरूपित करता है, तो $X \cap (X \cup Y)$ समान है:

(A) X (B) Y (C) ϕ (D) $X \cap Y$

प्रश्न संख्या 44 से 51 में से प्रत्येक में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

44. समुच्चय $\{x \in \mathbf{R} : 1 \le x < 2\}$ को ____________ प्रकार से भी लिखा जा सकता है।

45. जब $A = \phi$, तो P(A) में अवयवों की संख्या ____________ है।

46. यदि A तथा B इस प्रकार के परिमित समुच्चय हैं कि $A \subset B$, तो $n(A \cup B) =$ ____________.

47. यदि A तथा B कोई भी दो समुच्चय हैं, तो $A - B$ _____________ के समान है।

48. समुच्चय $A = \{1, 2\}$ का घात समुच्चय _____________ है।

49. दिया हुआ है कि $A = \{1, 3, 5\}$. $B = \{2, 4, 6\}$ तथा $C = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, तो समुच्चयों A, B तथा C का एक सार्वत्रिक समुच्चय _____________ है।

50. यदि $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 2, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 7\}$ तथा $C = \{2, 3, 4, 8\}$, तो

(i) $(B \cup C)'$ _____________ है। (ii) $(C - A)'$ _____________ है।

51. किसी भी समुच्चय A तथा B के लिए, $A - (A \cap B)$ _____________ के समान है।

52. सभी समुच्चयों A, B तथा C के लिए निम्नलिखित समुच्चयों का सही मिलान कीजिए:

(i)	$((A' \cup B') - A)'$	(a)	$A - B$
(ii)	$[B' \cup (B' - A)]'$	(b)	A
(iii)	$(A - B) - (B - C)$	(c)	B
(iv)	$(A - B) \cap (C - B)$	(d)	$(A \times B) \cap (A \times C)$
(v)	$A \times (B \cap C)$	(e)	$(A \times B) \cup (A \times C)$
(vi)	$A \times (B \cup C)$	(f)	$(A \cap C) - B$

प्रश्न संख्या 53 से 58 में से प्रत्येक में दिये हुए निम्नलिखित कथनों को सत्य या असत्य में व्यक्त कीजिए:

53. यदि A कोई समुच्चय है, तो $A \subset A$

54. दिया हुआ है कि $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ और यदि $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, तो $B \not\subset M$

55. समुच्चय $\{1, 2, 3, 4\}$ तथा $\{3, 4, 5, 6\}$ समान हैं।

56. $\mathbf{Q} \cup \mathbf{Z} = \mathbf{Q}$, जहाँ **Q** परिमेय संख्याओं का समुच्चय है और **Z** पूर्णांकों का समुच्चय है।

57. मान लीजिए कि समुच्चय R और T निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित हैं,

$R = \{x \in \mathbf{Z} \mid x$, संख्या 2 से भाज्य है$\}$

$T = \{x \in \mathbf{Z} \mid x$, संख्या 6 भाज्य है$\}$, तो $T \subset R$

58. दिया हुआ है कि $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \le x \le 2\}$, तो सिद्ध कीजिए कि $A = B$.